۵

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

مثال ۶. یک عدد ۵ رقمی بر ۳ بخش‌پذیر است، وقتی که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

بحث: این جمله را می‌توان به این صورت بازنویسی کرد: «اگر مجموع ارقام یک عدد ۵ رقمی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه آن عدد بر ۳ بخش‌پذیر است.»

بنابراین ما می‌توانیم فرضیات و نتایج را تفکیک و آن‌ها را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

الف: فرض کنیم n یک عدد صحیح باشد، به‌صورت: $n=a_۴a_۳a_۲a_۱a_۰$ و $۰\leq a_i\leq ۹$ برای هر $i=۰,۱,۲,۳,۴$ و $a_۴\neq ۰$ به‌طوری که: $a_۴+a_۳+a_۲+a_۱+a_۰=۳t$ که t عددی صحیح است.

(این حقیقت که n عددی صحیح است، یک فرض ضمنی است، زیرا مفهوم بخش‌پذیری فقط برای اعداد صحیح تعریف شده است.)

ب. عدد n بر ۳ بخش‌پذیر است، یعنی: $n=۳s$ که s عددی صحیح است.

اثبات: با توجه به اینکه (همان‌گونه که) این فرض اطلاعاتی دربارهٔ ارقام این عدد به‌دست می‌دهد، ما می‌خواهیم این ارقام را با استفاده از توان‌های ۱۰ تفکیک کنیم. پس:

$$n=a_۴a_۳a_۲a_۱a_۰=۱۰^۴a_۴+۱۰^۳a_۳+۱۰^۲a_۲+۱۰a_۱+a_۰ \quad (۱)$$

با توجه به فرض، $a_۴+a_۳+a_۲+a_۱+a_۰=۳t$، که t عددی صحیح است. بنابراین:

$$a_۰=۳t-a_۴-a_۳-a_۲-a_۱$$

اگر ما این عبارت را برای $a_۰$ (به‌جای $a_۰$) در عبارت n جایگزین کنیم (تساوی (۱)) و گام‌های (مراحل) جبری را بگذرانیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}n&=۱۰^۴a_۴+۱۰^۳a_۳+۱۰^۲a_۲+۱۰a_۱+a_۰\\&=۱۰^۴a_۴+۱۰^۳a_۳+۱۰^۲a_۲+۱۰a_۱+(۳t-a_۴-a_۳-a_۲-a_۱)\\&=۹۹۹۹a_۴+۹۹۹a_۳+۹۹a_۲+۹a_۱+۳t.\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}n&=۹۹۹۹a_۴+۹۹۹a_۳+۹۹a_۲+۹a_۱+۳t\\&=۳(۳۳۳۳a_۴+۳۳۳a_۳+۳۳a_۲+۳a_۱+t).\end{aligned}$$

چون عدد $(۳۳۳۳a_۴+۳۳۳a_۳+۳۳a_۲+۳a_۱+t)$ عددی صحیح است، ما ثابت کردیم که عدد n بر ۳ بخش‌پذیر است. ■

EXAMPLE 6. A 5-digit number is divisible by 3 when the sum of its digits is divisible by 3.

Discussion: This statement can be rewritten as: If the sum of the digits of a 5-digit number is divisible by 3, then the number is divisible by 3. Thus we can separate hypothesis and conclusions and rewrite them as follows:

A: Let n be an integer number with $n=a_4a_3a_2a_1a_0$, $0\leq a_i\leq 9$ for all $i=0,1,2,3,4$ and $a_4\neq 0$, such that $a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=3t$, where t is an integer umber.

(The fact that n is an integer number is an implicit hypothesis because the concept of divisibility is defined only for integer numbers).

B: The number n is divisible by 3; that is, $n=3s$ with s integer number.

Proof: As the hypothesis provides information about the digits of the number, we will separate the digits using powers of 10. Thus

$$n = a_4a_3a_2a_1a_0=10^4a_4+10^3a_3+10^2a_2+10a_1+a_0.$$

By hypothesis, $a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=3t$, where t is an integer number. Therefore

$$a_0=3t-a_4-a_3-a_2-a_1.$$

If we substitute this expression for a_0 into the expression for n and perform some algebraic steps, we obtain

$$\begin{aligned}n &= 10^4a_4+10^3a_3+10^2a_2+10a_1+a_0\\&= 10^4a_4+10^3a_3+10^2a_2+10a_1+(3t-a_4-a_3-a_2-a_1)\\&= 9{,}999a_4+999a_3+99a_2+9a_1+3t\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}n &= 9{,}999a_4+999a_3+99a_2+9a_1+3t\\&= 3(3{,}333a_4+333a_3+33a_2+3a_1+t).\end{aligned}$$

Because the number $3{,}333a_4+333a_3+33a_2+3a_1+t$ is an integer, we proved that number n is divisible by 3. ■

لغات و اصطلاحات

1) Digit: رقم
2) Divisible: بخش‌پذیر
3) Discussion: بحث
4) Statement: عبارت ـ گزاره
5) Rewritte: بازنویسی
6) Separate: جدا کردن، تفکیک کردن
7) Hypothesis: فرضیه، فرض
8) Conclusions: نتایج
9) Integer number: عدد صحیح
10) Implicit: ضمنی ـ التزامی
11) Expression: عبارت ـ بسط
12) Algebraic: جبری